金融工學硏究, 제9권 제3호 (2010. 9) 1~17

기초자산의 자기상관을 고려한 옵션가격결정모형의 성과

김 솔*

<요 약>

본 연구는 기초자산의 자기상관 특성이 옵션 가격결정 및 헤징에 미치는 영향을 검증한다. 이를 위하여 기초자산에 자기상관이 존재할 경우를 가정한 옵션 가격결정 모형인 Liao and Chen(2006) 모형과 기존의 Black and Scholes(1973) 모형의 성과를 비교한다. 연구 결과 내표본 가격 결정(in-sample-pricing) 검증에서는 모수(parameter)의 개수가 Black and Scholes(1973) 모형보다 1개 더 많은 Liao and Chen(2006) 모형이 당연히 우수한 결과를 보인다. 옵션 가격의 예측력을 측정하는 외표본 가격 결정(out-of-sample-pricing) 검증에서도 1일 또는 1주일 예측 모두에서 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 우수한 결과를 보인다. 헤징(hedging) 성과에서도 가격 결정력의 경우와 마찬가지로 1일과 1주일의 장단기 헤징 성과에서 모두 Liao and Chen(2006) 모형이 나은 결과를 보인다. 결론적으로 옵션가격 결정 및 헤징 시 자기상관의 고려의 중요성을 실증적으로 검증하였다.

주제어 : 옵션가격결정모형, 자기상관, 가격결정, 헤징, 블랙숄즈

논문접수일: 2008. 12. 9 1차수정일: 2009. 2. 2 게재확정일: 2009. 2. 16

이 논문은 2009년도 정부재원(교육과학기술부 인문사회연구역량강화사업비)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF - 2009 - 332 - B00176). 2008년 재무학회 추계학술발표회에서 좋은 논평을 해주신 최영수 교수님과 논문의 심사과정에서 유익한 조언을 해주신 익명의 두 분 심사위원께 감사드립니다.

* 한국외국어대학교 글로벌경영대학 부교수, E-Mail: solkim@hufs.ac.kr, Tel: 02-2173-3124

Ⅰ. 서 론

Fama(1970, 1991)가 효율적 시장가설(efficient market hypothesis)을 주장한 이후 이를 지지하거나 반박하는 많은 실증 연구들이 진행되어 왔다. 이는 시장에 있는 모든 정보가 자산 가격에 즉각적으로 반영된다는 가설이며 이에 따르면 주가 수익률은 자신의 과거와 독립적이어야 하며 예측 불가능해야 한다. 하지만 추후 많은 논문들은 모멘텀 거래(momentum trading) 또는 역발상 매매(contrarian trading) 등 과거 주가의 움직임에 기초한 거래 방식의 유용성에 대하여 언급하며 수익률의 예측 가능성을 제시하였다.[1] 이에 따라 많은 주식 또는 주가지수 시계열 관련 논문들이 통계학적으로 수익률의 예측 가능성을 언급하고 있다. 평균회귀모형(mean-reverting model), 이동평균과정(moving average process) 등이 자산의 수익률을 예측하는데 이용되는 모형들의 예이다. 이 중에서도 Hamao, Masulis, and Ng(1990), Bollerslev(1987), French, Schwert, and Stambaugh(1987) 등은 MA(1) 가정으로부터 자산 수익률의 자기상관(autocorrelation)을 추정하고 이의 유의성을 검증하였다. 한국 시장에서도 이충언(2002), 변종국, 조정일(2003), 홍정효, 문규현(2005) 등이 KOSPI 수익률은 MA(1)을 고려해야 함을 검증하였다.

옵션은 기초 자산의 프로세스에 의해 결정된다. 만일 기초 자산이 MA(1) 과정을 따르는 경우 옵션 가치 또한 이를 반영하여 평가되어야 한다. Black and Scholes(1973) 모형은 기초 자산의 수익률이 자기상관(autocorrelation)의 특성을 보이지 않고 독립적이라고 가정하는 기하 브라우니언 과정을(geometric Brownian process) 따른다고 가정한다. 본 연구는 기초자산이 MA(1)을 따른다고 가정하여 옵션가치평가모형을 도출한 Liao and Chen(2006) 모형을 KOSPI 200 주가지수 옵션 시장에 적용하여 모형의 유용성을 살펴본다. 가격결정 성과 비교를 위하여 현재 옵션 가격을 모형이 얼마만큼 잘 설명하는지 확인하기 위하여 내표본(in-sample) 가격결정성과를 비교한다. 또한 옵션 가격에 대한 예측력을 비교하기 위하여 외표본(out-of-sample) 가격결정성과를 비교한다. 단기와 장기 옵션 가격 예측성과를 모두 검증하기 위하여 본 연구에서는 1일과 1주일 예측성과를 비교한다. 마지막으로 옵션 가격 변동성에 대한 예측력을 검증하기 위하여 헤징(hedging) 성과를 비교한다. 본 연구에서는 델타(delta)만을 이용하여 복제 포트폴리오를 구성한다고 가정하고 헤징 성과를 비교한다. 이를 통하여 만일 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 우수한 성과를 보이는 경우 기초자산의 자기상관 특성이 옵션 가격에 영향을 주고 있으며 옵

---

1) 자세한 논의를 위하여 DeBondt and Thaler(1985, 1987), Jegadeesh and Titman (1993, 2001) 참조할 것.

션 가격 결정 및 헤징 시 이에 대한 고려가 반드시 필요함을 알 수 있다.

연구 결과 내표본 검증에서는 모수의 개수가 Black and Scholes(1973) 모형보다 1개 더 많은 Liao and Chen(2006) 모형이 우수한 결과를 보이며 현재 거래되고 있는 옵션 가격을 잘 설명하고 있음을 알 수 있었다. 옵션 가격의 예측력을 측정하는 외표본 가격 결정 검증에서도 1일 또는 1주일 예측 모두에서 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 우수한 결과를 보였다. 옵션 가격의 변동성에 대한 예측력을 측정하는 헤징에서도 마찬가지로 1일과 1주일의 장단기 헤징 성과에서 모두 Liao and Chen(2006) 모형이 나은 결과를 보였다. 결론적으로 기초자산의 자기상관을 고려한 Liao and Chen(2006) 모형이 우수한 결과를 보이며 옵션가격결정 및 헤징 시 자기상관의 고려의 중요성을 실증적으로 검증하였다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 기초자산의 자기상관의 옵션가격결정에서의 중요성을 검증하기 위해 본 연구에서 사용하는 Liao and Chen(2006) 모형을 제시하고 모수 추정 방법을 제시한다. 3절에서는 본 연구에서 사용되는 표본자료를 설명한다. 4절에서는 Liao and Chen(2006) 모형과 Black and Scholes(1973) 모형의 모수를 분석한다. 이를 이용하여 각 모형들 간에 내표본 가격결정(in-sample pricing), 1일 또는 1주일 외표본 가격결정(one day or one week ahead out-of-sample pricing)의 오차, 1일 또는 1주일 헤징(one day or one week ahead hedging) 오차를 비교한다. 마지막으로 5절에서는 본 연구의 결론과 추후 연구 방향을 도출한다.

Ⅱ. 모 형

많은 주식 또는 주가지수의 시계열 논문들은 수익률이 MA(1) 프로세스를 따른다는 것으로 보고하고 있다. 이에 따라 본 연구에서는 기초자산이 식(1)과 같이 Liao and Chen(2006)의 연속시간 MA(1) 프로세스를 따른다고 가정한다.

$$\frac{dS}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t + \sigma\beta dz_{t-h} \tag{1}$$

여기서, μ: 기초자산의 기대 수익률, σ: 기초자산의 변동성, h: 고정된 상수

β: 과거 충격에 대한 영향 계수($|\beta| < 1$)

z_t: 1차 표준 브라우니언 모션 프로세스

dz_{t-h}: $t-h$ 시점의 표준 브라우니언 모션 프로세스의 증분(increment)

식(1)에서 가정한 기초자산의 프로세스는 다음의 Ito 적분식으로 표현된다.

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dz_u + \int_0^t \sigma\beta S_u dz_{u-h}, \forall t \in [o, T] \tag{2}$$

시점 t의 기초자산의 조건부 분산은 아래와 같다.

$$Var_0(r_t) = \sigma^2 dt, \forall t \in [0, h) \tag{3}$$

$$Var_0(r_t) = (1+\beta^2)\sigma^2 dt, \forall t \in [h, T] \tag{4}$$

또한 조건부 자기상관계수는 다음과 같다.

$$Corr_0(r_t, r_{t+h}) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \forall t \in [0, h) \tag{5}$$

$$Corr_0(r_t, r_{t+h}) = \frac{\beta}{1+\beta^2}, \forall t \in [h, T] \tag{6}$$

여기서, r_t: 시점 t의 수익률

위의 프로세스는 $\beta = 0$인 경우 기하 브라우니안 모션 프로세스가 되고 $\beta \neq 0$인 경우 β의 부호에 따라 양 또는 음의 자기상관을 갖는 프로세스가 된다. 결과적으로 위의 프로세스는 일반적인 기하 브라우니안 프로세스보다 유연한 프로세스가 된다.

이러한 식(1)과 같은 프로세스를 가정함에 따라 유럽형 옵션가격결정 모형을 유도하면 아래와 같다.

$$C = SN(d_1^{'}) - Ke^{-r\tau}N(d_2^{'}) \tag{7}$$

여기서, $d_1^{'} = \dfrac{\ln(S/K) + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2[(1+\beta)^2(\tau - h) + h]}{\sigma\sqrt{(1+\beta)^2(\tau-h)+h}}$

$$d_2^{'} = \frac{\ln(S/K) + r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2[(1+\beta)^2(\tau - h) + h]}{\sigma\sqrt{(1+\beta)^2(\tau-h)+h}}$$

본 연구에서는 가격결정에 대한 분석뿐 아니라 자기상관의 고려에 따른 헤징 성과

도 비교한다. 이를 위하여 헤징 시 기초자산의 투자 비율인 델타(delta), $\triangle$를 정해야 한다. Liao and Chen(2006)의 모형에서도 Black and Scholes(1973)의 결과와 마찬가지로 $\triangle$는 아래와 같다.

$$\triangle = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1^{'}) \tag{8}$$

위의 모형에서 h는 모수를 추정하는 자료의 특성에 따라 달라진다. 즉 본 연구에서처럼 일별 자료를 이용하는 경우 $h = \frac{1}{365}$로 가정할 수 있는 것이다.

변동성 σ와 자기상관 모수인 β를 추정하는 방법은 다음과 같다. 본 연구에서는 옵션가격결정 모형에 관한 Bakshi, Cao and Chen(1997, 2000), Bates(2000) 등의 옵션가격결정 연구에서 변동성과 모수들을 추정하기 위해 가장 많이 채택하는 방법을 사용한다. 즉, 본 연구에서처럼 옵션가격결정 모형에 폐쇄해(closed-form solution)가 식 (7)과 같이 존재하는 경우 모형가격과 실제 시장옵션가격 차의 제곱을 최소화하는 방법이다. 이때 일별 횡단면(cross-section)의 옵션가격들을 이용함으로써 기초자산의 과거자료에서 관찰할 수 없는 구조화 모수들을 추정할 수 있다는 장점이 있으며, 또한 옵션은 미래 변동성에 대한 투자 자산으로 과거가 아닌 현재 가격에 존재하는 미래 예측 정보를 사용할 수 있다는 장점이 있다.

본 연구에서는 아래와 같이 가격비율오차의 제곱을 최소화 한다.2)

$$\min_{\phi_t} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{O_i(t,\tau;K) - O_i^*(t,\tau;K)}{O_i(t,\tau;K)} \right]^2 (t = 1, \cdots, T) \tag{9}$$

여기서, ϕ_t: 시점 t의 각 모형의 모수, N: t시점의 거래된 옵션의 수, $O_i(t,\tau;K)$: 시점 t의 옵션 i의 시장 가격, $O_i^*(t,\tau;K)$: 시점 t의 옵션 i의 모형 가격

2) 가격의 절대적인 오차의 제곱을 최소화 하는 것도 하나의 방법이다. 하지만 시장가격과 모형가격의 차의 제곱을 최소화하는 방법은 상대적으로 고가의 내가격 옵션에 더 많은 비중을 두게 되는 단점이 있으므로 위와 같이 오차 비율의 제곱을 최소화 하는 방법을 사용한다.

Ⅲ. 자 료

본 연구에서는 KOSPI 200 주가지수 옵션 시장을 대상으로 한다. 기간은 2000년 1월 4일부터 2006년 7월 31일까지의 6년 7개월간의 자료를 이용하였다.[3] 증권거래소에서 제공되는 1분 간격의 체결 자료에서 기초 자산인 주식시장에서 동시 호가가 진행되는 오후 2시 50분 이전에 체결된 특정 만기와 행사 가격을 지닌 옵션을 일별로 추출하여 모형의 일별 성과를 검증한다. 이는 각 시장의 종가를 연구에 이용할 경우 옵션 시장과 주식 시장의 상이한 장 종료 시간 차이로 인하여 발생할 수 있는 주식시장과 옵션 시장의 비동시적 거래(non-synchronous trading) 가능성을 제거한다. 단기 금리 지표로 흔히 사용되는 3개월 CD금리를 무위험 채권의 금리로 사용하였다.

자료의 신뢰성을 개선시키기 위하여 다음과 같은 방법으로 자료를 더 세분하였다. 우선 가격의 이산성에 대한 효과를 통제하기 위하여 옵션 가격이 0.02보다 작은 옵션은 제외하였고 무차익거래 조건(no-arbitrage condition)을 만족시키지 않는 옵션은 제외하였다.[4] 차기월물로의 만기이동(roll-over)에 의한 유동성 저하 위험을 감소시키기 위하여 만기가 7일 보다 작은 옵션은 제외하였고 또한 일별로 만기가 동일한 최근월물 옵션(nearest-term options)만을 추출하였다. 즉, KOSPI 200 시장은 잔존만기가 한 달인 최근월물에 거래가 집중되므로 7일 보다 크거나 같은 최근월물 옵션을 이용하였다.

변동성인 σ와 자기상관 모수인 β를 추정하기 위해서 외가격 콜과 풋옵션만을 이용한다. 이는 외가격 옵션에 투자자들의 거래량의 대부분이 집중되어 있고 또한 특정 행사가격(strike price)을 지닌 내가격 콜옵션은 외가격 풋옵션과 풋·콜 패러티(put-call parity)관계에 의하여 동일하기 때문에 콜옵션의 내가격과 풋옵션의 외가격을 모두 표본에 넣고 모수를 추정할 경우 중복 자료를 이용하는 문제점이 발생한다. 따라서 본 연구에서는 거래량이 집중되어 있고 콜과 풋옵션 간에 중복 자료 사용의 문제점이 없는 외가격 콜과 풋옵션만을 이용하여 모수를 추정한다. 이는 콜과 풋 옵션 모두에 포함된 정보를 모수 추정에 이용할 수 있다는 장점이 있다. 한편 콜과 풋옵션을 이용하여 개별적으로 모수를 추정하고 이를 이용하여 옵션가격결정 성과를 비교할 수 있다. 즉 일별로 모수를 콜과 풋옵션에 각각 하나씩 두 가지를 추정하는 방법이다. 하지만 이는 콜, 풋옵션 정보를 통합적으로 이용하지 못하는 단점이 있으며 또한 거래가 많지 않은 내가격 옵션의 정보가 표본에 포함되어 모수 추정에 왜곡이 발생할 수 있다

---

3) 김솔(2008)의 연구와 동일한 자료 추출 방법을 사용하였다.

4) 무차익거래 조건에서 배당을 고려해야 하나 본 연구의 표본은 만기가 한 달 또는 그 이하의 단기옵션이므로 배당의 영향이 작기에 배당을 고려하지 않았다.

는 위험이 존재하므로 본 연구에서는 외가격 콜과 풋옵션만을 이용하여 모수를 추정한다.

Ⅳ. 실증분석 결과

1. 모수 추정 결과

본 연구는 기초자산의 자기상관 특성이 옵션 가격에 미치는 영향을 살펴보고자 한다. 이를 위하여 우선 기초자산의 수익률 시계열에 자기상관의 성격이 존재하는지 살펴보았다. <표 1>은 기초자산인 KOSPI 200 수익률의 일별 자기 상관계수, 부분자기상관계수와 Ljung-Box Q 통계량 값을 보고하고 있다. <표 1>을 살펴보면 1차 자기상관의 값이 절대적으로 크지는 않으나 유의한 양의 값을 보이며 기초자산의 자기상관 값이 옵션 가격 결정에 영향을 줄 수 있음을 시사한다. 또한 Ljung-Box Q 통계량 값이 유의한 값을 보이며 이를 뒷받침 해주고 있다.[5] 다음으로 옵션 시장에서 바라본 자기상관의 영향을 비교 분석 하기 위하여 식(9)를 이용하여 옵션가격결정모형의 이론가격과 시장가격과의 오차 비율을 최소화 시키는 Black and Scholes(1973) 모형의 σ와 Liao and Chen(2006) 모형의 모수 σ와 β를 추정하였다. 추정 결과는 <표 2>와 <그림 1>에 나타나 있다.

<표 1> 자기상관계수

본 표는 KOSPI 200 지수의 자기상관계수(autocorrelation)와 부분자기상관계수(partial autocorrelation)를 정리하였다. AC는 자기상관계수를 PAC는 부분자기상관계수이다. Q-Stat과 Prob.은 Ljung-Box Q 통계량 값과 p 값을 각각 의미한다.

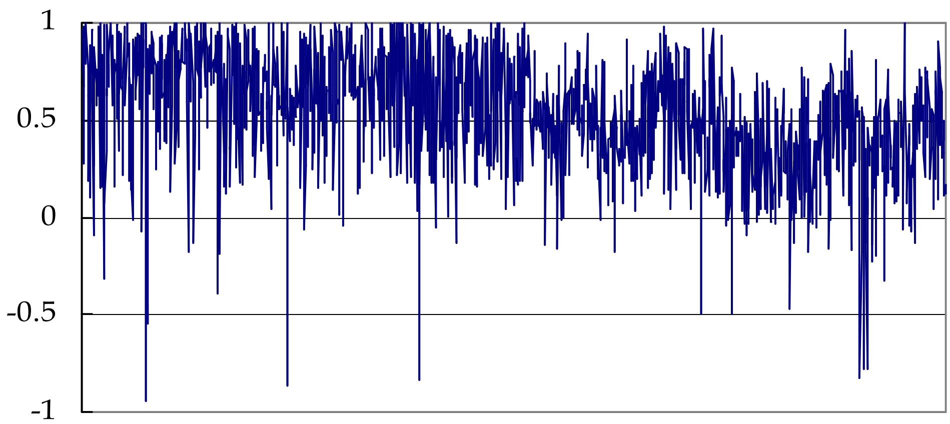
lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob.
1	0.071	0.071	8.1642	0.004
2	-0.067	-0.072	15.304	0.000
3	-0.010	0.001	15.450	0.001
4	-0.013	-0.018	15.740	0.003
5	-0.031	-0.029	17.270	0.004
6	0.011	0.014	17.474	0.008
7	-0.004	-0.011	17.501	0.014
8	-0.014	-0.012	17.815	0.023
9	0.003	0.004	17.834	0.037
10	-0.011	-0.014	18.012	0.055

5) 1차 자기상관만 존재한다고 볼 수는 없으나 1차 자기 상관 값이 가장 큰 양수 값을 보이고 있으며 2차 이후는 음수 값을 보이고 있으므로 본 연구의 Liao and Chan(2006) 모형처럼 1차 자기 상관 계수만을 고려해도 큰 무리는 없다고 판단된다.

Black and Scholes(1973) 모형의 경우 유일한 모수인 σ는 평균적으로 0.3119를 보이고 있으며 최대는 0.7030, 최소는 0.1147 값을 가짐을 알 수 있다. 기초자산의 자기상관을 고려한 모형인 Liao and Chen(2006) 모형의 경우 σ는 평균적으로 0.2082의 값을 지니며 Black and Scholes(1973) 모형보다 작은 값을 지님을 알 수 있었다. 이는 Liao and Chen(2006) 모형은 σ의 설명부분이 자기상관을 설명하는 β로 이동했음을 추측할 수 있다. β의 경우 0.5431의 값을 가지며 옵션 시장에서는 대체적으로 양의 자기상관을 내재하고 있음을 알 수 있으며 최대값은 1, 최소값은 -0.9375를 보였다.

<그림 1> 모수 추정 결과

본 그림은 Liao and Chen(2006) 모형의 모수 중 하나인 β값의 일별 추정치를 2000년 1월 4일부터 2006년 7월 31일까지 보고한다.



<그림 1>에서 β의 시계열을 살펴보았을 때도 표본 기간 내에 소수를 제외하고는 일관되게 양수 값을 보이고 있다. 이는 <표 1>에서 살펴본 바대로 실제 KOSPI 200 주가지수의 수익률이 유의한 양의 1차 자기상관을 가지는 것과 일맥상통하다 할 수 있다. 단, 옵션 시장에 내재된 값과 비교했을 경우 β를 이용한 자기상관계수의 경우와 실제 기초자산의 자기상관계수 값은 절대적인 차이는 있다. 하지만 이는 실제 주식시장과 옵션 시장의 참가자들이 인식하고 있는 자기상관의 정도는 다를 수 있으며 또한 본 연구에서 사용되는 Liao and Chen(2006)이라는 특정 모형으로부터 추정된 값이므로 구체적인 값의 차이를 분석하기 위하여 추후 연구가 필요하다. 또한 <그림 1>을 살펴보면 시간이 흐름에 따라 β값의 크기가 전반적으로 감소하고 있으며 옵션 시장 투자자들이 인식하는 자기상관의 정도가 약해지고 있음을 짐작할 수 있다. 결론적

으로 일별로 추정한 모형의 β의 평균값을 살펴본 결과 일관되게 유의하게 양의 값을 보이고 있으며 이는 기초자산의 자기상관의 영향이 옵션가격결정에 영향을 미칠 수 있음을 시사한다.

<표 2> 모수 추정 결과

본 표는 각 모형들의 추정한 모수(parameter)의 평균, 표준편차, 최대값, 최소값을 정리하였다. BS는 Black and Scholes(1973) 모형, LC는 Liao and Chen(2006) 모형을 의미한다. ** 는 1%수준에서 유의함을 나타낸다.

모형	BS	LC	
모수	σ	σ	β
평균	0.3119**	0.2082**	0.5431**
표준편차	0.1073	0.0771	0.2950
최대값	0.7030	0.9972	1.0000
최소값	0.1147	0.0871	-0.9375

2. 가격 결정력 및 헤징 검정

2.1 가격결정 및 헤징 성과 검정방법

가격 결정 검증은 다음과 같은 방식으로 실시한다. 내표본 가격 결정의 경우 특정일의 옵션거래 자료로부터 도출된 모수들을 모형에 다시 대입하여 그날 옵션 가격의 이론가를 구하는 것을 의미한다. 반면 외표본 가격 결정의 경우, 특정일의 옵션 자료로부터 도출된 모수들을 옵션가격결정 모형에 대입하여 다음 거래일의 주가, 행사가격, 이자율 등을 이용하여 이론가를 구하는 경우는 1일 외가격이라고 하고 7일 뒤에 모형에 대입하여 이론가를 구하는 경우는 1주일 외가격이라고 한다. 단, 1일 또는 7일 뒤에 자료가 없는 경우 익일의 자료에 대입하여 외가격 검증을 실시한다. 이를 통하여 옵션가격결정 모형의 예측력을 검증하고 모수의 안정성을 평가한다.

헤징 검증 방법은 다음과 같은 방식으로 실시한다. 각 모형으로부터 도출한 델타, $\triangle_S$는 기초자산 매입 수량이고 $\triangle_B$는 잔여 현금 포지션이라고 가정한다. 우선, t일에 옵션 매도포지션을 취하고 기초 자산을 $\triangle_S$ 만큼 매수하고 $\triangle_B$ 만큼 무위험 채권에 투자하여 헤징 포트폴리오를 구성한다. $\triangle_S$의 계산을 위하여 전일에 추정된 모수와 오늘 자 기초자산의 가격을 이용한다. 다음 단계로 1일 또는 1주일 후 포지션을 청산한다. 이때 청산시점에 복제 포트폴리오와 옵션 가격과의 차이를 헤징 오차로 정의한다.

$$\epsilon_t = \triangle_S S_{t+\triangle t} + \triangle_B e^{r\triangle t} - O(t+\triangle t, \tau - \triangle t; K) \tag{10}$$

여기서, $O(t,\tau;K)$: 시점 t의 옵션 i의 시장 가격, $\triangle_S$: 옵션의 델타, $\triangle_B$: 채권 포지션

가격 결정력의 검증은 평균 절대 비율 오차(Mean Absolute Percentage Errors, 이하 MAPE)와 평균 제곱 비율 오차(Mead Squared Percentage Errors, 이하 MSPE) 두 가지를 이용하여 비교한다. 두 오차 정의는 아래 식과 같다.

$$\text{MAPE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{O_i(t,\tau;K)-O_i^*(t,\tau;K)}{O_i(t,\tau;K)}\right| \tag{11}$$

$$\text{MSPE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{O_i(t,\tau;K)-O_i^*(t,\tau;K)}{O_i(t,\tau;K)}\right]^2 \tag{12}$$

여기서, $O_i(t,\tau;K)$: 시점 t의 옵션 i의 시장 가격이며, $O_i^{*(t,}\tau;K)$: 시점 t의 옵션 i의 모형 가격, N: t시점에 거래된 옵션의 수, T: 표본 안에 일수

헤징의 경우는 식(10)에서 정의한 헤징 오차를 이용하여 MAPE와 MSPE를 다시 기술하면 다음과 같다.

$$\text{MAPE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\epsilon_i}{O_i(t,\tau;K)}\right| \tag{13}$$

$$\text{MSPE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\epsilon_i}{O_i(t,\tau;K)}\right]^2 \tag{14}$$

여기서, $\epsilon_t = \triangle_S S_{t+\triangle t} + \triangle_B e^{r\triangle t} - O(t+\triangle t, \tau-\triangle t;K)$

MAPE는 가격 예측 및 헤징 오차의 절대적인 크기를 측정하고 MSPE는 가격 예측 및 헤징 오차의 변동성을 검증한다. 이 두 가지 오차의 정의를 이용하여 오차들과 0과의 평균적인 거리는 MAPE가 측정하게 되고 오차들 간에 편차는 MSPE가 측정하게 된다. 이 두 측정치 모두에서 우수한 모형, 즉 오차가 평균적으로 0에 가깝고 오차의 편차 또한 작은 모형이 진정으로 우수한 모형이다. 또한 가격도에 따른 가격 및 헤징 오차의 차이를 살펴보기 위하여 가격도를 주가지수/행사가격, 즉 S/K의 6단계로 구분하여 가격 예측 및 헤징 오차를 비교한다.

2.2 내표본 가격결정력 검증

내표본 가격결정력 검증은 현재 옵션 가격을 모형들이 얼마나 잘 설명하고 있는 가를 측정한다. 모수의 추정에서도 알 수 있듯이 옵션 시장참가자들이 인식하는 내재 자기상관계수의 값이 유의한 값을 보임으로써 Liao and Chen(2006) 모형이 설명력이 Black and Scholes(1973) 모형보다 우수할 것으로 예상할 수 있다. 실제로 <표 3>의 내표본 가격 결정력 검증 결과는 기초자산의 자기상관을 고려한 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 MAPE와 MSPE 모두 우수한 성과를 보이고 있음을 알 수 있었다. 평균적으로 MPAE는 6.41% 감소시키고 MSPE는 13.01% 감소시키고 있음을 알 수 있었다. 가격도 별로 살펴본 결과에서도 모든 가격도, 즉 콜과 풋 외가격 옵션 모두에서 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 나은 성과를 보이고 있다. 결국 기초자산의 자기상관의 고려가 옵션 시장 내표본에서의 평균적인 가격 오차와 오차의 변동성 모두를 개선시키고 있음을 알 수 있다. 가격도 별로 살펴보면 콜과 풋 옵션 심외가격(deep out-of-the-money) 옵션 보다는 등가격(at-the-money) 근처 옵션의 오차가 상대적으로 더 작음을 알 수 있다.

<표 3> 내표본 가격결정 오차

본 표는 내표본 가격 예측 오차(in-sample pricing errors)를 가격도별로 정리하였다. 가격도(moneyness)는 S/K로 정의하였고 S는 KOSPI 200 주가지수, K는 옵션의 행사가격을 의미한다. BS는 Black and Scholes(1973) 모형, LC는 Liao and Chen(2006) 모형을 의미한다. MAPE(Mean Absolute Percentage Errors)는 평균 절대 가격 비율 오차를 MSPE(Mean Squared Percentage Errors)는 평균 제곱 가격 비율 오차를 의미한다.

가격도	MAPE		MSPE	
	BS	LC	BS	LC
S/K<0.94	0.4283	0.2117	0.4918	0.0733
0.94<S/K<0.96	0.2763	0.2071	0.2219	0.0741
0.96<S/K<1.00	0.1138	0.1089	0.0415	0.0220
1.00<S/K<1.03	0.1394	0.0876	0.0346	0.0142
1.03<S/K<1.06	0.2396	0.1887	0.0955	0.0564
S/K>1.06	0.5353	0.5558	0.4112	0.3993
전체	0.3631	0.2990	0.2992	0.1691

하지만, 내표본의 가격결정력 검증 결과는 쉽게 예상할 수 있는 당연한 결과이다. 선형회귀분석에서 독립변수가 많은 모형이 R^2가 높은 경우와 마찬가지로 모수가 많은 Liao and Chen(2006) 모형이 내표본 가격 결정력에서 더 작은 오차를 가지는 것은 쉽게 예측할 수 있다. 진짜 중요한 점은 과적합(over-fitting)의 문제없이 외표본에서 더 나은 성과를 보이는 가에 달려있다. 즉 자기상관 특성을 나타내는 모수의 존재로

인한 설명력의 증대가 아닌 자유도(degree of freedom)의 증가에 따른 설명력이 증대 가능성을 배제시킬 필요가 있다. 이에 따라 다음 절에서는 추정한 모수를 1일 또는 1주일 후에 적용하여 가격결정력을 평가하는 외표본 가격결정력 검증을 실시한다.

2.3 외표본 가격결정력 검증

외표본 가격 결정력 검증은 앞서 언급한 대로 오늘의 옵션 자료로부터 도출된 모수들을 옵션가격결정 모형에 대입하여 1일 후 또는 1주일 후 거래일의 주가, 이자율, 행사가격 등의 이미 주어진 정보들을 이용하여 이론가를 구하는 것을 말한다. 이 검증이 진정한 의미의 가격 결정력 검증을 의미하여 미래 옵션 가격의 예측 및 모수의 안정성을 평가하는 방법이기도 하다.

<표 4> 외표본 가격결정 예측 오차

본 표는 외표본 가격 예측 오차(out-of-sample pricing errors)를 가격도별로 정리하였다. <가>에서는 1일 외표본 가격결정 예측 오차를 <나>에서는 1주일 외표본 가격결정 예측 오차를 보고한다. 가격도(moneyness)는 S/K로 정의하였고 S는 KOSPI 200 주가지수, K는 옵션의 행사가격을 의미한다. BS는 Black and Scholes(1973) 모형, LC는 Liao and Chen(2006) 모형을 의미한다. MAPE(Mean Absolute Percentage Errors)는 평균 절대 가격 비율 오차를 MSPE(Mean Squared Percentage Errors)는 평균 제곱 가격 비율 오차를 의미한다.

<가> 1일 외표본 가격 예측 오차

가격도	MAPE		MSPE	
	BS	LC	BS	LC
S/K<0.94	0.4950	0.3418	0.6172	0.2344
0.94<S/K<0.96	0.3147	0.2554	0.2916	0.1285
0.96<S/K<1.00	0.1333	0.1282	0.0527	0.0317
1.00<S/K<1.03	0.1468	0.1062	0.0378	0.0196
1.03<S/K<1.06	0.2515	0.1991	0.1034	0.0645
S/K>1.06	0.5539	0.5495	0.4133	0.4106
전체	0.3939	0.3391	0.3401	0.2206

<나> 1주일 외표본 가격 예측 오차

가격도	MAPE		MSPE	
	BS	LC	BS	LC
S/K<0.94	0.6079	0.5418	0.9508	0.6338
0.94<S/K<0.96	0.3881	0.3378	0.4538	0.2425
0.96<S/K<1.00	0.1720	0.1698	0.0792	0.0589
1.00<S/K<1.03	0.1712	0.1367	0.0482	0.0304
1.03<S/K<1.06	0.2803	0.2284	0.1233	0.0820
S/K>1.06	0.5624	0.5847	0.4971	0.4259
전체	0.4417	0.4196	0.4729	0.3419

<표 4>를 살펴보면 외표본 가격결정 검증 결과를 확인할 수 있다. 우선 1일 외표본 오차를 살펴보면 전체 옵션의 경우 Liao and Chen(2006) 모형을 이용하여 MAPE를 5.48% 감소시키고 있음을 알 수 있다. MSPE 측면에서는 11.85% 오차의 분산을 감소시킴을 알 수 있다. 또한 이는 내표본의 결과와 비교하여 MAPE는 1.03%, MSPE는 1.16% 미약한 정도로만 Liao and Chen(2006) 모형의 상대적 우위가 감소함을 알 수 있어 과적합의 문제가 크지 않고 1일 외표본에서도 가격 오차 개선 효과가 크게 나타남을 알 수 있다. 역시나 1주일 외표본 경우에도 Black and Scholes(1973) 모형 대비 Liao and Chen(2006) 모형의 오차 감소가 MAPE는 2.21%, MSPE는 13.10%로 크게 감소하고 있음을 알 수 있다. MAPE의 경우 내표본이나 1일 외표본 검증의 결과와 비교하여 상대적 우수성이 감소하기는 하였으나 여전히 우위를 점하고 있으며 MSPE의 경우에는 오히려 Black and Scholes(1973) 모형 대비 상대 효과는 더 강해졌음을 확인하였다. 결국 Black and Scholes(1973) 모형 대비 Liao and Chen(2006)의 우월성은 변하지 않고 있음을 알 수 있다. 가격도 별로 살펴본 결과에서도 역시나 내표본의 경우에서와 마찬가지로 전 구간에서 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 더 나은 성과를 보이고 있음을 알 수 있으며 심외가격 옵션보다는 등가격 옵션 주변에서 오차가 작음을 알 수 있다. 결과적으로 내표본뿐 아니라 외표본에서도 기초자산의 자기상관을 고려한 Liao and Chen(2006) 모형의 우월성은 유지되고 있으며 옵션 가격 예측 시 유용하게 사용될 수 있음을 확인할 수 있다.

2.4 헤징 성과 검증

본 절에서는 옵션 가격의 예측이 아니라 옵션 가격의 변동성에 대한 예측력을 검증할 수 있는 헤징 성과를 검증한다. 헤징의 오차는 식(10)에서처럼 옵션 가격과 옵션 가격 결정 모형의 델타를 이용하여 복제한 포트폴리오와의 오차로 정의한다. <표 5>은 두 모형 간에 1일 또는 1주일 헤징 성과를 비교하고 있다.

<표 5> 헤징 오차

본 표는 헤징 오차(hedging errors)를 가격도별로 정리하였다. <가>에서는 1일 헤징 오차를 <나>에서는 1주일 헤징 오차를 보고한다. 가격도(moneyness)는 S/K로 정의하였고 S는 KOSPI 200 주가지수, K는 옵션의 행사가격을 의미한다. BS는 Black and Scholes(1973) 모형, LC는 Liao and Chen(2006) 모형을 의미한다. MAPE(Mean Absolute Percentage Errors)는 평균 절대 가격 비율 오차를 MSPE(Mean Squared Percentage Errors)는 평균 제곱 가격 비율 오차를 의미한다.

<가> 1일 헤징 오차

가격도	MAPE		MSPE	
	BS	LC	BS	LC
S/K<0.94	0.4678	0.4219	0.7191	0.5654
0.94<S/K<0.96	0.1976	0.1857	0.1065	0.0969
0.96<S/K<1.00	0.0829	0.0819	0.0146	0.0140
1.00<S/K<1.03	0.0874	0.0870	0.0153	0.0152
1.03<S/K<1.06	0.1418	0.1393	0.0470	0.0458
S/K>1.06	0.2618	0.2448	0.1900	0.1576
전체	0.2552	0.2366	0.2602	0.2100

<나> 1주일 헤징 오차

가격도	MAPE		MSPE	
	BS	LC	BS	LC
S/K<0.94	2.5374	2.4866	30.8184	31.7545
0.94<S/K<0.96	0.6867	0.6449	1.7122	1.5157
0.96<S/K<1.00	0.2532	0.2466	0.1340	0.1256
1.00<S/K<1.03	0.2779	0.2773	0.1603	0.1606
1.03<S/K<1.06	0.4892	0.4796	0.5800	0.5456
S/K>1.06	1.1628	1.0752	4.0448	3.2807
전체	1.1911	1.1432	9.2579	9.2092

1일 또는 1주일 헤징 성과에서도 이전의 가격결정 성과 비교에서와 마찬가지로 Liao and Chen(2006) 모형이 우수한 성과를 보이고 있음을 알 수 있다. 가격결정 검증의 경우와 달리 실제 평균의 차이가 크지 않음에 따라 헤징 오차들 사이에 t 검정을 이용한 통계적 유의성 검증을 한 결과 5% 유의수준에서 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973)에 비하여 통계적으로 유의하게 우수한 헤징 오차를 지님을 알 수 있었다. 또한 외가격 가격 결정력 검증에서와 마찬가지로 모든 가격도에서 우월함을 유지하고 있음을 알 수 있다. 즉 기초 자산의 자기상관의 고려는 옵션 가격 예측뿐 아니라 헤징 성과에서도 Black and Scholes(1973) 모형 대비 개선 효과가 존재함을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 기존의 실증연구들이 언급하고 있는 기초자산의 예측 가능성의 옵션 가격 결정에의 영향을 살펴보았다. 기초자산이 MA(1)을 따른다는 기존의 실증 연구들을 기초로 하여 이를 가정한 Liao and Chen(2006) 모형과 기존의 Black and Scholes(1973) 모형을 비교하여 기초자산의 자기상관의 옵션 가격 결정 및 헤징에 대한 영향을 살펴보았다.

연구 결과 내표본 가격 결정력 검증에서는 모수의 개수가 Black and Scholes(1973) 모형보다 1개 더 많은 Liao and Chen(2006) 모형이 우수한 결과를 보이며 현재 거래되고 있는 옵션가격을 잘 설명하고 있음을 알 수 있었다. 옵션 가격의 예측력을 측정하는 외표본 가격 결정 검증에서도 1일 또는 1주일 예측 모두에서 Liao and Chen(2006) 모형이 Black and Scholes(1973) 모형보다 우수한 결과를 보였다. 옵션 가격의 변동성에 대한 예측력을 측정하는 헤징에서도 마찬가지로 1일과 1주일의 장단기 헤징 성과에서 모두 Liao and Chen(2006) 모형이 나은 결과를 보였다. 결론적으로 기초자산의 자기상관을 고려한 Liao and Chen(2006) 모형이 우수한 결과를 보이며 옵션 가격결정 및 헤징 시 자기상관의 고려의 중요성을 실증적으로 검증하였다.

참고문헌

김솔 (2008), “위험중립분포 왜도·첨도의 상대적 중요성: Corrado and Su(1996) 모형을 이용한 옵션 가격 예측,” 선물연구, 제16권 제1호, 1-20.

변종국·조정일 (2003), “KOSPI 200 주가지수선물 도입과 주식시장의 비대칭적 변동성,” 재무관리연구, 제20권 제1호, 191-212.

이충언 (2002), “우리나라와 미국 주식시장 동조화 현상에 대한 원인 분석과 전망,” 대외경제정책연구원 지역연구회시리즈, 02-01, 1-87.

홍정효·문규현 (2005), “미국 증권시장의 한국 증권시장에 대한 정보이전 효과에 관한 실증적 연구 : 대칭적 비대칭적 정보이전효과,” 금융학회지, 제10권 제1호, 61-93.

Bakshi, G. S., C. Cao, and Z. W. Chen (1997), “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, 2003-2049.

Bakshi, G. S., C. Cao, and Z. W. Chen (2000), “Pricing and Hedging Long-term Options,” *Journal of Econometrics*, 94, 277-318.

Bates, D. (2000), “Post-’87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market,” *Journal of Econometrics*, 94, 181-238.

Bollerslev, T. (1987), “A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return,” *Review of Economics and Statistics*, 69, 542-547.

Black, F. and M. Scholes (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

De Bondt, W. F. M. and R. H. Thaler (1985), “Does the Stock Market Overreact?,” *Journal of Finance*, 40, 793-805.

De Bondt, W. F. M. and R. H. Thaler (1987), “Further Evidence of Investor Overreaction and Stock Market Seasonality,” *Journal of Finance*, 42, 557-581.

Fama, E. (1970), "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance*, 25, 383-417.

Fama, E. (1991), “Efficient Capital Markets: II,” *Journal of Finance*, 46, 1575-1617.

French, K. R., G. W. Schwert, and R. F. Stambaugh (1987), “Expected Stock Returns and Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 19, 3-29.

Hamao, Y., R. W. Masulis, and V. Ng (1990), “Correlations in Price Changes and Volatility Across International Stock Markets,” *Review of Financial Studies*, 3, 281-307.

Jegadeesh, N. and S. Titman (1993), “Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications from Stock Market Efficiency,” *Journal of Finance*, 48, 65-91.

Jegadeesh, N. and S. Titman (2001), ”Profitability of Momentum Strategies: An Evaluation of Alternative Explanations,” *Journal of Finance*, 56, 699-720.

Liao, S. and C. Chen (2006), “The Valuation of European Options When Asset Returns Are Autocorrelated,” *Journal of Futures Markets*, 26, 85-102.

Abstract

Empirical Performance of Option Pricing Model which Assumes that Asset Returns are Autocorrelated

*Sol Kim**

In this paper, we examine pricing and hedging performance of option pricing model which assumes that asset returns are autocorrelated. We compare Black and Scholes(1973)' option pricing model with Liao and Chen(2006)'s model. It is found that Liao and Chen(2006)'s model considering the autocorrelation of asset returns shows better performance than Black and Scholes(1973) model for in-sample, out-of-sample pricing and hedging performance. As a result, it is important to consider the autocorrelation of asset returns for pricing and hedging KOSPI 200 index options.

Key Words: Option Pricing Model, Autocorrelation, Pricing, Hedging, Black and Scholes

---

This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government (NRF - 2009 - 332 - B00176).
* Associate Professor, College of Business Administration, Hankuk University of Foreign Studies, 02) 2173-3124, solkim@hufs.ac.kr